

フーリエ変換の数学基礎と C 言語プログラミング実習

首都大学東京 篠原広行

近年の放射線治療では画像の重要性が高まっています。本セミナーは放射線治療に従事されている方や、医用画像処理に関心がある方を対象にした数学基礎と C 言語プログラミングの基礎について講義と実習を行います。C 言語初心者の方を対象としていますが、パソコン上に C 言語開発環境を整えてはいるが C 言語の勉強の仕方がわからない方や C 言語の勉強を始められた方にも、わかりやすく説明します。C 言語プログラムはポインタを使用せず、視覚的にわかりやすい 2 次元配列を用い記述しています。C 言語の基礎として、1) 配列の取り方、2) for 文、3) if else 文、4) 画像の読み出しと書き込みなどを習得すれば、C 言語の詳しい文法について知らなくても、画像処理のプログラムを勉強していくことは十分可能です。

画像処理を勉強するにはフーリエ変換に慣れることができます。フーリエ変換は信号処理、画像処理の基礎です。そのため、これから信号処理や画像処理を勉強しようと計画されている方、フーリエ変換に関心はあるがフーリエ変換の意味がわからない方、あるいは勉強の仕方がわからない方にも、セミナーの数学基礎と C 言語プログラミング実習は役立ちます。

大学等の授業でフーリエ解析あるいはフーリエ変換を学ぶ機会があると思われますが、それを C 言語でどのように離散フーリエ変換にプログラム化するか、離散フーリエ変換を数式による解析的フーリエ変換（連続フーリエ変換）と比較するにはどのような注意が必要かなど、C 言語初心者の方は戸惑うことがあります。そこで、フーリエ級数展開、複素フーリエ級数展開、フーリエ変換、複素フーリエ級数展開とフーリエ変換の関係等について述べ、C 言語で離散フーリエ変換プログラムを作成する手順について図を多く用い説明します。

フーリエ変換には 10 程の性質がありますが、それらの性質の中でも、畳み込み定理と相関定理は実空間と周波数空間との演算を結び付け応用範囲の広い重要な定理です。線形性とシステムの応答関数が位置（あるいは時間）に依存しない、シフト不变性を有するシステム（線形シフト不变システム）の入出力関係は畳み込みで表されます。畳み込みに慣れると、低域通過フィルタ、高域通過フィルタなどの線形フィルタ処理や画像再構成フィルタの理解が深まります。一方、相関はパターン認識や画像位置合わせに応用されます。セミナーでは畳み込みと相関についても説明します。そして、作成したプログラムを用い 2 次元画像位置合わせの基礎となる位置推定の計算機シミュレーション実験を行います。

セミナー担当者はこれまで大学で応用数学と C 言語プログラミングの授業を長年担当していました。また、現在、理工系大学院の非常勤講師として C 言語による医用画像処理の授業を担当しています。これらの経験を基に、セミナー参加者の方に少しでもお役に立つような数学基礎と C 言語プログラミングの基礎を講義したいと考えています。そして、数学史上、最も重要な公式の一つとして知られるオイラーの公式（実空間の三角関数と虚数を含む複素指数関数を結び付ける公式）を用い、フーリエ変換の手計算と離散フーリエ変換のプログラム化を行い、周波数空間の世界を体験していただきたいと考えています。

なお、限られた時間のため、セミナー参加者の方は事前にお送りする 1) フーリエ級数展開と複素フーリエ級数展開、2) フーリエ変換、3) 畳み込み、4) 相関の講義資料を予習してください。三角関数、指数関数の積分など高校程度の数学で十分読める内容です。資料のプログラムはわからなくても大丈夫です。セミナーで説明します。グラフや画像などは実際に作成するものです。見ておいてください。

講義予定表

項目	講義と実習内容	
放射線治療と画像処理		
画像の構造 (バイナリデータとテキストデータ)	Excel による 128×128 画素の画像表示ツールの作成: 画像に関する Excel の便利な使い方の紹介	
フーリエ級数展開と複素フーリエ級数展開 ¹⁾	三角関数, 指数関数の積分, 部分積分, 周期関数と空間周波数	
フーリエ変換 ²⁾	① 1 次元フーリエ変換の手計算: 矩形関数, ② 2 次フーリエ変換の手計算: 2 次元矩形関数	
第 2 回 C 言語プログラミング 1	<p>1 次元矩形関数 $f(x)$ の作成とグラフ化</p> <p>1 次元矩形関数のフーリエ変換 $F(u)$ のグラフを描く</p> <p>2 次元矩形画像 $f(x, y)$ の作成</p> <p>2 次元矩形関数のフーリエ変換 $F(u, v)$ の画像を作成</p>	<p>不連続点を考慮した矩形関数の作り方</p> <p>$f(x)$ の積分値と $F(0)$ の関係</p> <p>$f(x, y)$ の積分値と $F(0, 0)$ の関係</p> <p>if else 文で場合分けし, 原点の値を記述する (不能点の扱い)</p>
第 3 回 C 言語プログラミング 2	離散フーリエ変換プログラムの作成	<p>① 1 次元関数と三角関数の掛け算による 1 次元フーリエ変換</p> <p>② 2 次元関数と 2 次元平面波の掛け算による 2 次元フーリエ変換 (4 重の for 文を使用)</p> <p>③ 2 次元関数を x 方向と y 方向にそれぞれ 1 次元フーリエ変換 (3 重の for 文を 2 回使用)</p>
第 4 回 画像処理の数学基礎 2	<p>畳み込み³⁾</p> <p>相関⁴⁾</p>	<p>① 畳み込みの手計算: 矩形関数と矩形関数, ② 畳み込み定理</p> <p>③ 相関の手計算: 矩形関数と矩形関数, ④ 相関定理</p>
第 5 回 C 言語プログラミング 3	<p>観測画像と参照画像の相関による位置推定プログラムの作成</p> <p>観測画像と参照画像のフーリエ位相相関 (位相限定相関) による位置推定プログラムの作成</p>	<p>① 相関定理によるフーリエ変換を利用した相関プログラム</p> <p>② 相関の数式で観察画像に対し参照画像が推移する方向の実験</p> <p>③ 位相画像を利用した位相相関プログラム</p> <p>④ 実験結果をパワーポイントファイルにまとめる</p>

1), 2), 3), 4) は 予習していただくために参加申し込み者に事前に配布する講義資料